

درهم تنیدگی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۱ بهمن ۱۴۰۴

۱ مقدمه

بدون شک در هم تنیدگی مهم ترین ویژگی و در واقع ویژگی تعیین کننده مکانیک کوانتومی است. اهمیت آن از برهم نهی نیز بیشتر است، چرا که برهم نهی در امواج کلاسیک هم وجود دارد. امروز می دانیم که درهم تنیدگی نه تنها سبب اصلی رایانش کوانتومی است بلکه به کمک آن شیوه مخابره اطلاعات را نیز به کلی دگرگون کرد. درهم تنیدگی به معنای نوعی همبستگی بین نقاط یا ناظر های دور از هم است. اما تنها این نیست. در فصل مربوط به نامساوی بل نشان داده ایم که هر نوع همبستگی به معنای وجود درهم تنیدگی نیست و درهم تنیدگی نشان دهنده نوعی از همبستگی است که هرگز توسط متغیرهای موضعی قابل توصیف نیست. درست این است که بگوییم هنوز درهم تنیدگی را نمی شناسیم، و ریشه های آن را نمی دانیم. اما می توانیم در همین چارچوب مکانیک کوانتومی آن را توصیف کنیم. می توانیم بگوییم که چه حالت هایی در هم تنیده هستند و کدام ها نیستند. حتی می توانیم یک گام بیشتر برداریم و بگوییم درهم تنیدگی یک حالت کم است یا زیاد، به عبارت دیگری می توانیم این خصلت را اندازه بگیریم. خواهیم دید که در این اندازه گیری بین حالت های خالص و آمیخته فرق بسیاری هست. کوششی که در چند دهه گذشته برای سامان بخشیدن به درهم تنیدگی حالت های کوانتومی، بخصوص حالت های چند بخشی، به کار رفته البته پایان نیافته و هنوز راه خیلی درازی در پیش است. در این درس در باره درهم تنیده بودن یا نبودن حالت ها، نخست حالت های خالص و حالت های آمیخته، بحث می کنیم و سپس به اندازه درهم تنیدگی می پردازیم.

۲ درهم تنیدگی حالت های خالص

سیستمی متشکل از دو بخش A و B در نظر می گیریم. بردار حالت این سیستم یعنی $|\psi\rangle_{AB}$ را درهم تنیده^۱ می گوئیم هرگاه نتوان آن را به صورت ضرب تانسوری دو بردار حالت مجزا از زیربخش های آن نوشت یعنی

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \quad (۱)$$

درچنین حالتی اندازه گیری مشاهده پذیرهای بخش A عموماً باعث تقلیل بردارحالت شده و اندازه گیری های بعدی زیر بخش B را حتی اگر B فاصله فضاگونه ای از A داشته باشد متاثر می کنند. این خاصیت درهم تنیدگی، ناموضعیّت و یا همبستگی کوانتومی نامیده می شود.

مثال معروف یک حالت درهم تنیده را نخستین بار شرودینگر، اینشتین، پودولسکی وروزن وبعدها بوهم ارایه دادند .

شکل نهایی این مثال که به زوج EPR یا حالت بل مشهوراست و برای سیستم های دوحالته تعریف می شود به شکل زیراست:

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (۲)$$

که درآن 0 و 1 نشان دهنده دو حالت پایه یکی از زیرسیستم ها (قطبش فوتون، اسپین الکترون یا هسته) است. علاوه براین حالت می توان سه حالت دیگر معرفی کرد که همراه با حالت فوق یک پایه بهنجار برای فضای دو ذره تشکیل می دهند و به پایه بل موسوم هستند:

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)_{AB} \\ |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle - |1,1\rangle)_{AB} \\ |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle)_{AB} \\ |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)_{AB}. \end{aligned} \quad (۳)$$

این حالت ها را اصطلاحاً حالت های درهم تنیده ماکزیمال^۲ می گویند.

برای فهم این که چرااین حالت ها همبستگی کوانتومی ماکزیمال دارند به مطلب زیرتوجه می کنیم. فرض می کنیم که این دودره نزد دو نفر به نام های آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده باشد. حال A به تنهایی می خواهد بفهمد که کدام یک از چهارحالت فوق بین آنها به اشتراک نهاده شده است. برای این کاراو اسپین ذره خود را درجهت $\vec{n}$ اندازه می گیرد. مقدارمتوسط این اندازه گیری برابرست با:

$$\langle\psi|\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\otimes I|\psi\rangle = tr(\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\rho_A) \quad (۴)$$

^۱entangled
^۲maximally entangled

که در آن

$$\rho_A := \text{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}) \quad (5)$$

ماتریس چگالی مربوط به ذره نزد آلیس است. یک محاسبه ساده نشان می دهد که $\rho_A = \frac{I}{2}$. در نتیجه مستقل از جهت انتخاب شده برای اندازه گیری اسپین توسط آلیس مقدار متوسط را برابر با صفر بدست می آورد. این امر به این معناست که هیچ نوع اطلاعاتی در اندازه گیری های زیرسیستم آلیس وجود ندارد و او نمی تواند به تنهایی حالتی را که در اختیار او و باب است را تعیین کند. همین امر برای باب نیز صادق است. تنها یک اندازه گیری غیرموضعی نظیر اندازه گیری مشاهده پذیرهای $\sigma_x \otimes \sigma_x$ و $\sigma_z \otimes \sigma_z$ ، می تواند نوع حالت را به آلیس و باب بنمایاند. در اینجا با پدیده ای مواجه هستیم که مطالعه اجزاء یک سیستم بزرگ هیچ نوع اطلاعاتی در مورد کل سیستم بدست نمی دهد و اطلاعات تنها در همبستگی غیرموضعی بین دوسیستم نهفته است که از آن به درهم تنیدگی یاد می کنیم.

۳ حالت های آمیخته

ممکن است که دودره نزد آلیس و باب خود جزیی از یک سیستم بزرگ تر باشند. در این صورت حالت این دودره نه بایک بردار حالت بلکه بایک ماتریس چگالی مشخص می شود. هرگاه ماتریس چگالی این دودره به صورت

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \quad (6)$$

باشد می گوییم دودره در یک حالت جدایی پذیر قرار گرفته اند. در این حالت هیچ نوع همبستگی بین دو ذره وجود ندارد. برای این که این خاصیت را به وضوح ببینیم فرض کنید که دو مشاهده پذیر O و O' را به ترتیب از دو ذره A و B اندازه بگیریم. احتمال اینکه ذره اول مقدار m را از مشاهده پذیر O و ذره دوم مقدار n را از مشاهده پذیر O' از خود نشان دهند برابر است با

$$P_{AB}(m, n) := \text{tr}(P_m \otimes P'_n \rho_{AB}) \quad (7)$$

که در آن P_m و P'_n به ترتیب عملگرهای تصویرگر مربوط به نتایج m و n هستند. با قراردادن فرم ρ_{AB} در رابطه بالا و محاسبه ردّ به نتیجه زیر می‌رسیم

$$P_{AB}(m, n) = P_A(m)P_B(n), \quad (۸)$$

که در آن $P_A(m)$ احتمال آن است که در اندازه گیری روی ذره A مقدار m بدست آید، با تعریف مشابهی برای $P_B(n)$. این رابطه نشان می‌دهد که در این حالت هیچ نوع همبستگی بین دوزره وجود ندارد. حال فرض می‌کنیم که ماتریس چگالی ترکیبی از حالت های جدایی پذیر به شکل زیر باشد یعنی

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (۹)$$

که در آن مجموعه $\{p_i\}$ یک مجموعه از احتمالات و ρ_A^i و ρ_B^i مجموعه ای از ماتریس های چگالی برای دو ذره باشند. با تکرار همان محاسبه بالا در می‌یابیم که در این حالت

$$P_{AB}(m, n) = \sum_i p_i P_A^i(m) P_B^i(n), \quad (۱۰)$$

که در آن $P_A^i(m)$ برابر است با احتمال اینکه ذره A مقدار m را از خاصیت O نشان دهد وقتی که در حالت ρ_A^i است، با تعریف مشابهی برای $P_B^i(n)$. تحت چنین شرایطی، احتمال اینکه ذره A خاصیت m را از خود نشان دهد برابر است با

$$P_A(m) = \sum_n P_{A,B}(m, n) = \sum_{i,n} p_i P_A^i(m) P_B^i(n) = \sum_i p_i P_A^i(m), \quad (۱۱)$$

که در آن از رابطه $\sum_n P_B^i(n) = 1$ استفاده کرده ایم. به طریق مشابه بدست می‌آوریم

$$P_B(m) = \sum_n P_{A,B}(m, n) = \sum_{i,m} p_i P_A^i(m) P_B^i(n) = \sum_i p_i P_B^i(n). \quad (۱۲)$$

واضح است که در این حالت

$$P_{A,B}(m, n) \neq P_A(m)P_B(n), \quad (۱۳)$$

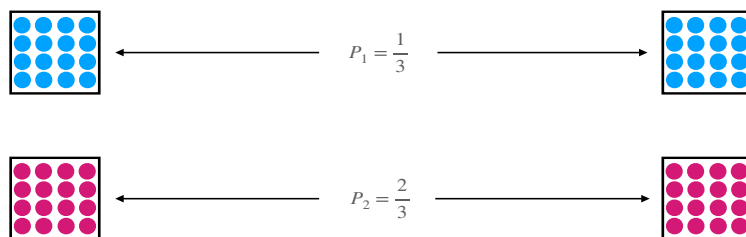
یعنی بین دوزره یک همبستگی وجود دارد. آیا همبستگی های نشان داده شده در رابطه (۱۰) را واقعا می‌توان با آزمایش های کلاسیکی ایجاد کرد؟ پاسخ این سوال مثبت است. به دو مثال ساده توجه می‌کنیم. شکل (۱) آزمایشی را نشان می‌دهد که در آن جعبه های نشان داده شده در

شکل با احتمالات نشان داده شده در اختیار دو شخص دور از هم قرار داده می شود. این دو شخص را آلیس و باب می نامیم. در این صورت احتمال این که آلیس و باب توپ های با رنگ های مشخص را بدست بیاورند، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} P_{AB}(\text{blue, blue}) &= \frac{1}{3} \\ P_{AB}(\text{red, red}) &= \frac{2}{3} \\ P_{AB}(\text{red, blue}) &= 0 \\ P_{AB}(\text{blue, red}) &= 0. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که نشان دهنده هم بستگی بین احتمالات اندازه گیری آلیس و باب است.

■ **تمرین:** با محاسبه احتمالات اندازه گیری توسط آلیس و باب نشان دهید که روابط فوق واقعا به معنای همبستگی بین نتایج اندازه گیری آلیس و باب است.



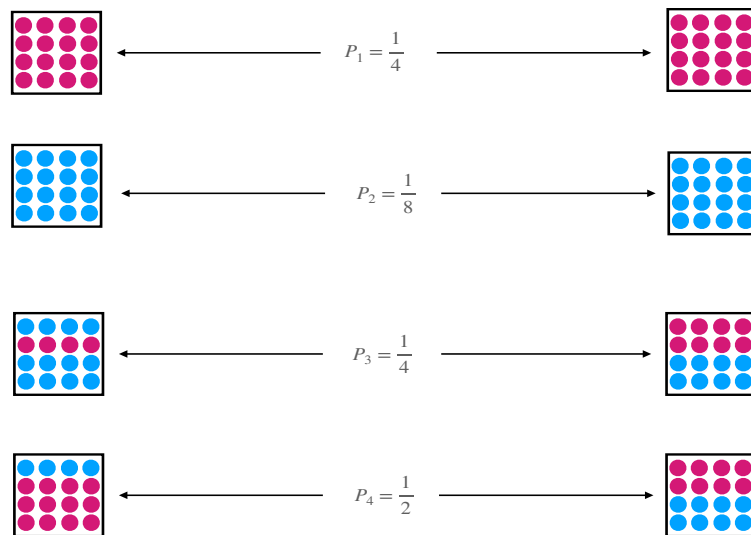
شکل ۱: جعبه های نشان داده شده، با احتمالات نشان داده شده به آلیس و باب داده شده. آلیس و باب هر کدام به صورت تصادفی از یکی از جعبه هایی که در اختیار آنهاست توپی را برمی دارند. احتمال این که توپ هایی که برمی دارند از چه رنگی باشد، دارای یک همبستگی است. این همبستگی در متن درس محاسبه شده است.

می توانیم وضعیت پیچیده تری را مطابق با آنچه که در شکل (۲) تصویر شده در نظر آوریم. در این صورت احتمالات قبلی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$P_{AB}(\text{blue, blue}) = \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{1}{8} \times 1\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{32}$$

$$\begin{aligned}
P_{AB}(\text{red, red}) &= \left(\frac{1}{8} \times 1\right) + \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{32} \\
P_{AB}(\text{red, blue}) &= \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{32} \\
P_{AB}(\text{blue, red}) &= \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32}.
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

■ **تمرین:** با محاسبه احتمالات اندازه گیری توسط آلیس و باب نشان دهید که روابط فوق واقعا به معنای همبستگی بین نتایج اندازه گیری آلیس و باب است.



شکل ۲: جعبه های نشان داده شده، با احتمالات نشان داده شده به آلیس و باب داده شده. آلیس و باب هر کدام به صورت تصادفی از یکی از جعبه هایی که در اختیار آنهاست توپی را برمی دارند. احتمال این که توپ هایی که برمی دارند از چه رنگی باشد، دارای یک همبستگی است. این همبستگی در متن درس محاسبه شده است.

به این ترتیب و با بررسی این مثال ها می بینیم که همبستگی های ایجاد شده، همبستگی های کلاسیک هستند که ناشی از مخلوط کردن مجموعه ای از حالت های جدایی پذیر با احتمالات کلاسیکی مطابق با رابطه (9) هستند. به این دلیل است که حالت (9) را نیز باید یک حالت فاقد همبستگی کوانتومی یا درهم تنیدگی نامید. به این ترتیب به تعریف زیر برای درهم تنیدگی حالت ها به صورت کلی (خالص یا آمیخته) می رسیم:

■ **تعریف:** یک حالت دو بخشی که نتوان آن را به صورت (۹) نوشت، یک حالت درهم تنیده است.

حال سوال این است که آیا می توانیم براحتی تشخیص دهیم که آیا یک حالت داده شده دلخواه مثل ρ_{AB} از نوع (۹) هست یا خیر؟ این تشخیص به هیچ وجه آسان نیست. زیرا از ابتدا یک ماتریس چگالی به صورت جمع محدبی از ماتریس های چگالی حاصلضربی تعریف نمی شود. به عنوان مثال ماتریس چگالی زیر را می توان در نظر گرفت

$$\rho_{AB} = a|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + b|\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & & a \\ & b & b \\ & b & b \\ a & & a \end{pmatrix}, \quad (۱۶)$$

که مخلوطی است از دو حالت درهم تنیده ماکزیمال $|\psi^+\rangle$ و $|\phi^+\rangle$. ضمناً می دانیم که a و b اعداد مثبتی هستند که در شرط $a + b = 1$ صدق می کنند. تجزیه این حالت به شکل (9) ممکن است بسیار دشوار باشد و بنابراین معلوم نیست که بتوان درباره درهم تنیدگی آن حکم قاطعی صادر کرد. اما اگر $a = b = \frac{1}{2}$ باشد، می توان این ماتریس چگالی را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(I + \sigma_x \otimes \sigma_x) \quad (۱۷)$$

این رابطه هنوز نشان نمی دهد که این حالت یک حالت جدایی پذیر است زیرا σ_x یک ماتریس چگالی نیست. اما می توان رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{I + \sigma_x}{2} \otimes \frac{I + \sigma_x}{2} + \frac{I - \sigma_x}{2} \otimes \frac{I - \sigma_x}{2} \right) \quad (۱۸)$$

که نشان می دهد، حالت ρ_{AB} واقعا به صورت یک حالت جدایی پذیر نوشته شده است، زیرا $\frac{1}{2}(I \pm \sigma_x)$ یک ماتریس چگالی است. اما شاید به طور اتفاقی و با سعی و خطا توانستیم نشان دهیم که برای وقتی که $a = b = \frac{1}{2}$ است، حالت ρ_{AB} یک حالت جدایی پذیر است. سوال این است که در حالت کلی چگونه می توان در باره جدایی پذیری یک حالت آمیخته قضاوت کرد. در حالت کلی یعنی در ابعاد دلخواه، این کار فوق العاده دشوار است و هنوز راه مشخصی برای آن کشف نشده است. اما پیشرفت هایی حاصل شده است. نخستین آنها چیزی است که

امروزه ملاک پرز^۳ نامیده می شود. در سال ۱۹۹۸ اشهر پرز^۴ شرط لازمی را برای جدایی پذیری یک ماتریس چگالی کشف کرد که به صورت زیر بیان می شود:

■ **ملاک جدایی پذیری (پرز ۱۹۹۸):** اگر یک ماتریس چگالی جدایی پذیر باشد حتماً ترانهاده جزیی آن یک ماتریس مثبت است

منظور از ترانهاده جزیی^۵ اعمال عمل ترانهاده روی یکی از زیرسیستم هاست. به شکل ریاضی این ردّ چنین تعریف می شود: اگر ρ را به صورت زیر بنویسیم

$$\rho_{AB} = \sum_i a_i \otimes b_i \quad (۱۹)$$

آنگاه

$$\rho_{AB}^{T_B} := \sum_i a_i \otimes b_i^T. \quad (۲۰)$$

دقت کنید که رابطه (20) به معنای جدایی پذیر بودن ماتریس چگالی نیست زیرا a_i ها و b_i ها خود ماتریس چگالی نیستند.

■ **اثبات قضیه پرز:** اگر ρ_{AB} باشد، بنابراین تعریف می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i. \quad (۲۱)$$

در نتیجه ترانهاده جزیی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_{(AB)}^{T_B} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^{iT}. \quad (۲۲)$$

حال از سه خاصیت ساده ولی مهم استفاده می کنیم:

الف: چون ماتریس ρ_B^i مثبت است، ترانهاده آن نیز مثبت است،

ب: ضرب تانسوری دو ماتریس مثبت یک ماتریس مثبت است،

ج: جمع دو ماتریس مثبت باضرایب نامنفی نیز یک ماتریس مثبت است.

از این سه خاصیت نتیجه می گیریم که ماتریس $\rho_{AB}^{T_B}$ یک ماتریس مثبت است.

^۳Peres Criteria

^۴Asher Peres

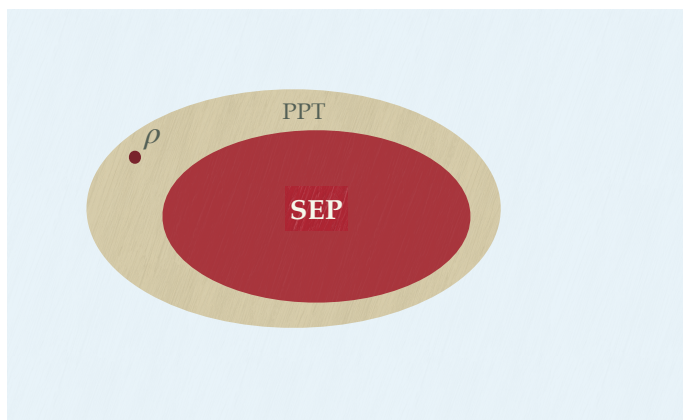
^۵partial transpose

■ **تعریف:** حالت های ترانهاده مثبت^۶ اصطلاحاً حالت های PPT خوانده می شوند. اگر مجموعه حالت های جدایی پذیر را با SEP

نشان دهیم، آنگاه قضیه پرز نشان می دهد که در حالت کلی رابطه

$$SEP \subset PPT, \quad (23)$$

برقرار است. در شکل (۳) حالت ρ یک حالت ترانهاده مثبت است که در عین حال درهم تنیده هم هست. تشخیص این حالت ها معمولاً بسیار دشوار است. این حالت ها را حالت های درهم تنیده مقید^۷ می نامیم. ثابت شده است که این حالت ها اگر چه نامساوی بل را نقض می کنند، اما نمی توان با آن ها فرابرد کوانتومی انجام داد. هم چنین ثابت شده است که درهم تنیدگی این حالت ها قابل تغلیظ نیست. مفهوم تغلیظ درهم تنیدگی را در همین درس معرفی خواهیم کرد.



شکل ۳: مجموعه حالت های PPT نیز یک مجموعه محدب است. در حالت کلی $SEP \subset PPT$ و تنها در بعد های 2×2 و 2×3 داریم:

$$SEP = PPT$$

باید دقت کنیم که شرط پرز یک شرط لازم است و نه کافی. خوشبختانه هورودکی^۸ ها نشان داده اند که برای سیستم های با بعد 2×2 و 2×3 این شرط کافی هم هست. باین شرط می توانیم بگوییم که حالتی مثل (16) به ازای چه مقادیری از a یا b جدا پذیر و به ازای چه مقادیری درهم

^۶Positive Partial Transpose
^۷Bound Entangled State

تنیده است. در مورد مثال بالا می دانیم که ترانهاده جزئی ماتریس ρ که باترانهاده کردن تمام بلوک های دوبعدی بدست می آید عبارت است از

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & & & b \\ & b & a & \\ & a & b & \\ b & & & a \end{pmatrix}, \quad (24)$$

با ویژه مقادیر $a+b, a+b, a-b, a-b$ که به ازای تمام مقادیر $a = b = \frac{1}{2}$ یک ماتریس منفی است. در نتیجه ماتریس چگالی ρ_{AB} به ازای هر مقدار $a \neq \frac{1}{2}$ نشان دهنده یک حالت درهم تنیده است و به ازای $a = \frac{1}{2}$ غیر غم ظاهرش که نشان می دهد مخلوطی مساوی از دو حالت درهم تنیده ماکزیمال است هیچ نوع درهم تنیدگی ندارد. علت این امر آن است که می توان در این حالت ماتریس چگالی را به شکل زیر نیز تجزیه کرد:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{I + \sigma_x}{2} \otimes \frac{I + \sigma_x}{2} + \frac{I - \sigma_x}{2} \otimes \frac{I - \sigma_x}{2} \right) \quad (25)$$

که نشان می دهد این حالت مخلوطی از دو حالت کاملاً جدا پذیر نیز هست. به این ترتیب می بینیم که برای یک ماتریس چگالی تجزیه های گوناگونی می تواند وجود داشته باشد. تجزیه صریح یک حالت می تواند بسیار دشوار باشد. اهمیت قضیه پرز نیز در همین است که بدون نیاز به این تجزیه درباره امکان آن حکم می کند.

آیا قضیه پرز یک قضیه دو طرفه است؟ یعنی اگر ترانهاده جزئی یک ماتریس چگالی مثبت بود می توانیم حتماً نتیجه بگیریم که آن حالت جدا پذیر است؟ پاسخ این سوال برای ابعاد دلخواه منفی است. اما نشان داده شده که در ابعاد 2×2 و 2×3 این قضیه دو طرفه است و مثبت بودن ترانهاده جزئی شرط لازم و کافی برای جدا پذیری یک حالت آمیخته است.

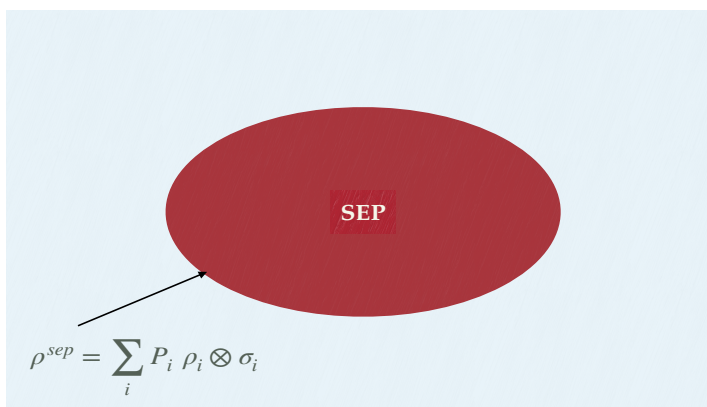
۴ شاهد های درهم تنیدگی

موضوع شاهد های درهم تنیدگی ^۸ یکی از موضوعات مهم و پویا در پژوهش های مربوط به درهم تنیدگی است. خواننده ای که علاقمند به این موضوع باشد می تواند به مقالات پژوهشی مربوطه مراجعه کند. در این جا فقط به معرفی کلیات این مفهوم می پردازیم. هرگاه با فرم صوری یک

^۸Entanglement Witness

حالت کوانتومی دو بخشی با ابعاد d_1 و d_2 روبرو شویم، در صورتی که شرط $d_1 d_2 \leq 6$ باشد می توانیم با استفاده از ملاک پرز به طور قطع در باره جدپذیر بودن یا نبودن آن قضاوت کنیم. سوال این است که در غیر این صورت چگونه می توانیم در باره جدپذیر بودن یا درهم تنیده بودن یک حالت قضاوت کنیم. هم چنین یک سوال مهم دیگر این است که چگونه می توانیم با اندازه گیری های مشخصی در باره جدپذیر بودن یک حالت از ذرات که در آزمایشگاه با آنها سروکار داریم قضاوت کنیم. این ها سوالاتی است که منجر به پیدایش مفهومی به نام شاهد درهم تنیدگی شده است. در این بخش به اختصاص زیاد و فقط برای سیستم های دو بخشی شاهد درهم تنیدگی را معرفی می کنیم. **در واقع شاهد درهم تنیدگی، یک نوع عملگر ریاضی با خواص مشخص است که محاسبه متوسط آن روی یک حالت داده شده نشان می دهد که آیا این حالت درهم تنیده است یا نه. معنای آزمایشگاهی این گزاره این است که شاهد درهم تنیدگی یک مشاهده پذیر مشخص است که اندازه گیری آن روی مجموعه ای از جفت ذرات داده شده تعیین می کند که آیا این ذرات درهم تنیده هستند یا نه.** بعد از این مقدمات می توانیم به تعریف دقیق شاهد درهم تنیدگی بپردازیم. نخستین نکته ای که به آن توجه می کنیم این است که مجموعه ی حالت های جدای پذیر در فضای تمامی حالت ها یک مجموعه محدب است.

■ **تمرین:** نشان دهید که مجموعه حالت های جدایی پذیر یک مجموعه محدب است.



شکل ۴: ناحیه قرمز رنگ مجموعه حالت های جدایپذیر را نشان می دهد که یک مجموعه محدب است. البته مجموعه های محدب در ابعاد بالا می توانند اشکال خیلی پیچیده ای داشته باشند.

دومین نکته ای که به آن توجه می کنیم یک قضیه ریاضی موسوم به قضیه هان-باناخ^۹ است که صورت ساده آن چنین است. هرگاه S یک زیر مجموعه محدب در یک مجموعه X باشد، آنگاه می توان تابعی خطی مثل $F : X \rightarrow R$ چنان ساخت که شرط زیر برقرار باشد:

$$F(x) > 0, \quad \forall x \in S. \quad (۲۶)$$

چگونه باید از چنین قضیه ای استفاده کرد؟ این تابع می بایست تابعی باشد که به حالت ρ_{AB} بستگی داشته و نسبت به آن نیز خطی باشد. برای سادگی از این به بعد اندیس های AB را نمی نویسیم. فرض کنید که ماتریس چگالی را در یک پایه متعامد یکه از ماتریس ها بسط داده باشیم، مثل زیر:

$$\rho = \sum_{i,j} \rho_{ij} \Gamma_i \otimes \Gamma_j. \quad (۲۷)$$

در این صورت کلی ترین شکل تابع خطی F به صورت زیر خواهد بود:

$$F(\rho) = \sum_{i,j} w_{ij} \rho_{ij} \quad (۲۸)$$

که در آن w_{ij} ها ضرایب بسطی هستند که تابع F را تعریف می کنند. می توان این تابع خطی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$F(\rho) = \text{tr}(W\rho) \quad (۲۹)$$

که در آن

$$W = \sum_{i,j} w_{ij} \Gamma_i \otimes \Gamma_j$$

یک عملگر است. بنابراین هر تابع خطی مثل $F(\rho)$ را می توان به صورت $F(\rho) = \text{tr}(W\rho)$ نوشت. از آنجا که می خواهیم، محاسبه این تابع یک تعبیر آزمایشگاهی نیز داشته باشد، W را یک عملگر هرمیتی می گیریم که نشان دهنده یک مشاهده پذیر باشد. می خواهیم که تابع F چنان باشد که روی تمام حالت های جدایی پذیر مقدار مثبتی داشته باشد. در واقع می خواهیم که معادله $F = 0$ نشان دهنده ابرصفحه ای باشد که کل فضای حالت ها را به دو قسمت تقسیم کرده باشد و مجموعه حالت های جدایی پذیر در یک طرف آن واقع شده باشد. هم چنین می خواهیم تابع F چنان باشد که برای بعضی از حالت ها هم مقدار منفی داشته باشد. در این صورت به یک ملاک مشخص می رسیم به این معنا که هرگاه تابع $F(\rho)$ منفی بود، مطمئن هستیم که حالت ما درهم تنیده است. البته اگر مقدار تابع مثبت شد، نتیجه خاصی نمی توانیم بگیریم، شکل (۵). با این مقدمات به تعریف دقیق یک شاهد درهم تنیدگی می رسیم:

^۹Hahn-Banach

■ **تعریف شاهد درهم تنیدگی:** یک شاهد درهم تنیدگی، عملگری هرمیتی مثل W است که دارای دو شرط زیر است: اولاً روی همه حالت های جدایی پذیر مقدار متوسط آن نامنفی است. ثانياً، حتماً دارای ویژه مقدار های منفی هم هست. یعنی عملگری نیست که روی تمام فضا مثبت باشد. به بیان دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \text{tr}(W\rho) &\geq 0 & \forall \rho \in SEP, \\ \exists |v\rangle \in H_A \otimes H_B & \langle v|W|v\rangle < 0. \end{aligned} \quad (30)$$

حال سوال اصلی این است که چگونه شاهد درهم تنیدگی بسازیم یا پیدا کنیم. این سوال البته پاسخ اش را در مجموعه تحقیقات وسیعی می گیرد که هم اکنون نیز در جریان است. در این درس فقط به بعضی از نتایج کلی این پژوهش ها اشاره می کنیم. برای شروع یک بار دیگر به تعریف شاهد درهم تنیدگی نگاه می کنیم. نخست به یک تعریف احتیاج داریم:

■ **تعریف: عملگر بلوکه-مثبت** 10 یک عملگر W بلوکه مثبت است هر گاه دارای خاصیت زیر باشد:

$$\langle a, b|W|a, b\rangle \geq 0 \quad \forall |a\rangle \in H_A \quad |b\rangle \in H_B. \quad (31)$$

بنابراین عملگر بلوکه مثبت روی تمام حالت های ضربی مثبت است. با توجه به این تعریف می توانیم بگوییم که یک شاهد درهم تنیدگی عملگر بلوکه مثبتی است که روی تمام فضا مثبت نیست.

■ **تمرین:** نشان دهید که این تعریف با تعریف قبلی از شاهد درهم تنیدگی معادل است.

حال می خواهیم یک قضیه اساسی در باره شاهد های درهم تنیدگی را بیان و اثبات کنیم. فرض کنید که $\mathcal{E} : L(H_d)^+ \rightarrow L(H_d)^+$ یک نگاشت مثبت باشد که کاملاً مثبت نباشد. حال ماتریس چوی این نگاشت را تشکیل می دهیم:

$$C_{\mathcal{E}} := d(I \otimes \mathcal{E})(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|). \quad (32)$$

■ **قضیه: ماتریس چوی متناظر با نگاشت فوق یک شاهد درهم تنیدگی است.** این قضیه بیان می کند که هرگاه یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت مثل $\mathcal{E}$ داشته باشیم، حتماً می توانیم یک شاهد درهم تنیدگی به صورت $W = C_{\mathcal{E}}$ بسازیم.

■ **اثبات:** نخست باید ثابت کنیم که W یک ویژه مقدار منفی دارد که البته بدیهی است که دارد زیرا از ابتدا گفته ایم که نگاشت $\mathcal{E}$ کاملاً مثبت نیست. در واقع اگر این نگاشت کاملاً مثبت بود، ماتریس چوی وابسته به آن نیز مثبت می شود و ویژه مقدار منفی نمی داشت. سپس

¹⁰Block-Positive

باید ثابت کنیم که برای هر ماتریس چگالی جدایی پذیر ارزش انتظاری آن مثبت یا صفر است. برای این منظور کافی است ماتریس مثل $a \times b$ را انتخاب کنیم. زیر هر ماتریس چگالی جدایی پذیر ترکیب محدبی از این نوع ماتریس هاست. بنابراین می خواهیم ثابت کنیم که برای هر ماتریس $b = a \otimes \rho$ ، داریم

$$tr(W(a \otimes b)) \geq 0.$$

برای این کار می نویسیم:

$$\begin{aligned} tr(W(a \otimes b)) &= tr(|i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)(a \otimes b)) = \langle j|a|i\rangle tr(\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)b) \\ &= a_{ji} tr(\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)b) = tr(\mathcal{E}(a^T)b). \end{aligned} \quad (۳۳)$$

اما از آنجا که a و b مثبت هستند و $\mathcal{E}$ نیز یک نگاشت مثبت است، پس $\mathcal{E}(a)$ نیز یک عملگر مثبت است. در این جا به این نکته توجه می کنیم که اگر چه حاصلضرب دو عملگر مثبت الزاماً مثبت نیست، اما رد حاصلضرب آنها همواره مقداری مثبت یا صفر است. یعنی $tr(\mathcal{E}(a)b) \geq 0$. به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

اما ارتباط شاهدهای درهم تنیدگی و نگاشت های مثبت از این هم عمیق تر است. دلیل اش هم این است که قضیه ای که ثابت کردیم، در واقع یک قضیه دوطرفه است به این معنا که هر شاهد درهم تنیدگی حتماً ماتریس چوی وابسته به یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت است.

■ **قضیه:** هر شاهد درهم تنیدگی نگاشت چوی وابسته به یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت است.

■ **اثبات:** فرض کنید که W یک شاهد درهم تنیدگی است. می خواهیم ثابت کنیم که حتماً یک نگاشت $\mathcal{E} : L(H_d)^+ \rightarrow L(H_d)^+$ وجود دارد به قسمی که $W = C_{\mathcal{E}}$.

برای این کار نگاشت $\mathcal{E}$ را به صورت صریح می سازیم. می دانیم که W عملگری است که روی ضرب تانسوری دو فضا عمل می کند، یعنی $W \in L(H_d) \otimes L(H_d)$. این عملگر را می توانیم به صورت زیر بسط دهیم

$$W = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \hat{w}_{ij} \quad (۳۴)$$

که در آن $\{|i\rangle \mid i = 1, 2, \dots, d\}$ بردارهای پایه فضای H_d هستند و $\hat{w}_{ij}$ عملگر هایی هستند که روی فضای دوم اثر می کنند. حال نگاشت $\mathcal{E}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

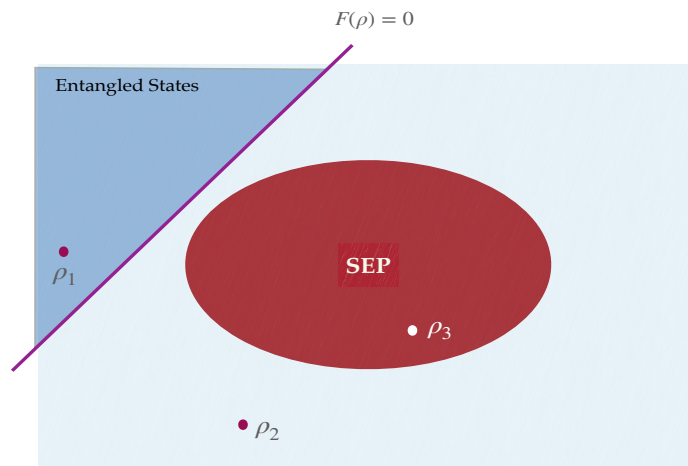
$$\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) := \hat{w}_{ij}. \quad (۳۵)$$

دقت کنید که کافی است که کافی است نگاشت را روی ماتریس های پایه تعریف کنیم. با توجه به این روابط خواهیم داشت:

$$W = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \hat{w}_{ij} = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = d(I \otimes \mathcal{E})|\phi^+\rangle\langle\phi^+| \quad (۳۶)$$

که نشان می دهد W واقعا ماتریس چوی مربوط به نگاشت $\mathcal{E}$ است.

به این ترتیب یک تناظر یک به یک بین شاهد های درهم تنیدگی و نگاشت های مثبت ولی نه کاملاً مثبت برقرار می شود.



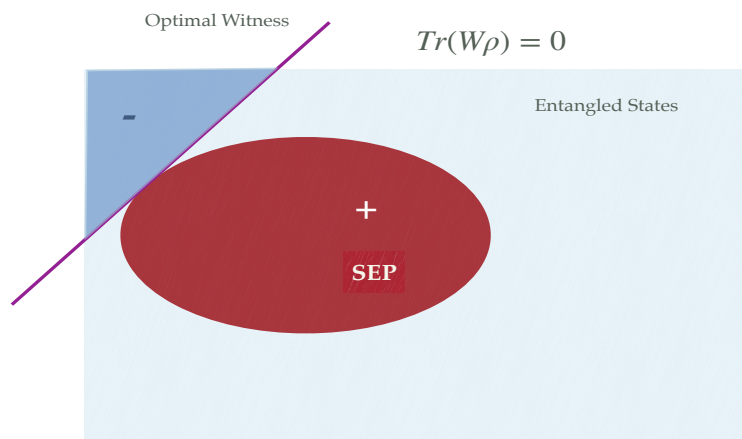
شکل ۵: یک شاهد درهم تنیدگی فقط می تواند درهم تنیدگی یک حالت را آشکار کند. اگر F روی یک ماتریس چگالی منفی باشد، آن حالت حتماً درهم تنیده است، مثل حالت ρ_1 . اما اگر F مقدار مثبتی داشته باشد، حالت مربوطه می تواند درهم تنیده باشد مثل ρ_2 یا جدایی پذیر باشد مثل ρ_3 .

۱.۴ نگاشت های تجزیه پذیر و شاهد های تجزیه پذیر

در این بخش مفهوم مهمی به نام تجزیه پذیر یک نگاشت مثبت را معرفی می کنیم. یک نگاشت مثبت مثل Φ را یک نگاشت تجزیه پذیر^{۱۱} می نامیم اگر آن را بتوان به شکل زیر نوشت:

$$\Phi = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \circ \mathcal{T} \quad (۳۷)$$

Decomposable Map^{۱۱}



شکل ۶: یک شاهد بهینه، شاهدهی است که ابر سطح مربوط به آن بر مجموعه محدب حالت های جدایی پذیر مماس است.

که در آن $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ نگاشت های کاملاً مثبت و T نگاشت ترانهاد است. متناظر با این نگاشت تجزیه پذیر، یک شاهد تجزیه پذیر مثل W وجود دارد که از ماتریس چوی مربوط به این نگاشت ساخته می شود: هرگاه ماتریس چوی مربوط به نگاشت های $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ را به ترتیب با P و Q نشان دهیم، یک محاسبه ساده نشان می دهد که

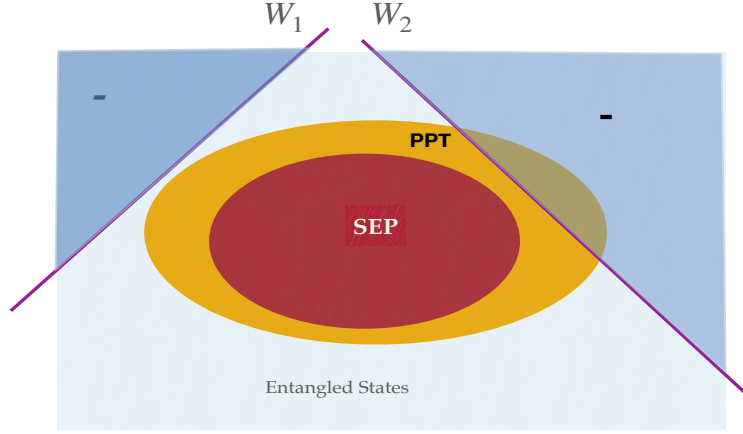
$$W = [I \otimes \mathcal{E}_1 + I \otimes (\mathcal{E}_2) \circ T](|\phi^+\rangle\langle\phi^+|) = P + (I \otimes T)Q = P + Q^\Gamma \quad (38)$$

که در آن Q^Γ به معنای ترانهاد جزئی^{۱۲} عملگر Q است. به این ترتیب برای هر ماتریس چگالی ρ که ترانهاد جزئی آن مثبت باشد، یا به اصطلاح هر ماتریس چگالی $\rho \in PPT$ خواهیم داشت:

$$Tr(W\rho) = Tr(P\rho) + Tr(Q^\Gamma\rho) = Tr(P\rho) + Tr(Q\rho^\Gamma) \geq 0. \quad (39)$$

معنای این رابطه این است که این نوع شاهدها روی همه حالت های PPT مقدار مثبتی دارند و این نوع حالت ها را نمی توانند تشخیص دهند، اگر چه این حالت ها دارای نوعی درهم تنیدگی هستند. این که از نوعی درهم تنیدگی سخن می گوئیم دلیل اش این است که می توان نشان داد درهم تنیدگی حالت های PPT از نوع مقید^{۱۳} است و قابل تقطیر کردن نیست. به یک معنا نگاشت های تجزیه پذیر و شاهدهای تجزیه پذیر متناظر با آنها، شاهدهای قوی درهم تنیدگی نیستند.

^{۱۲} Partial Transpose
^{۱۳} Bound Entanglement



شکل ۷: شاهد W_1 یک شاهد تجزیه پذیر است و مقدارش روی همه حالت های PPT مثبت است و نمی تواند این نوع حالت های درهم تنیده را شناسایی کند. اما شاهد W_2 یک شاهد تجزیه ناپذیر است و می تواند بخشی از حالت های PPT را شناسایی کند.

۲.۴ مثالهایی از شاهدهای درهم تنیدگی

■ **مثال یک:** اولین مثال از شاهدهای درهم تنیدگی ناشی از نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت ترانهاده است. شاهد درهم تنیدگی وابسته به این نگاشت برابر است با:

$$W_T := d(I \otimes T)(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|) = \sum_{i,j} |i,j\rangle\langle j,i| =: F \quad (40)$$

که در آن F عملگر جایگشت است. این عملگر روی دو حالت دلخواه به صورت زیر عمل می کند:

$$F|\phi\rangle|\psi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle. \quad (41)$$

به همین دلیل برای هر حالت جدایی پذیر مثل

$$\rho_{sep} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle\langle\phi_{\alpha}| \otimes |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}|$$

خواهیم داشت:

$$Tr(W\rho_{sep}) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}, \psi_{\alpha}|F|\phi_{\alpha}, \psi_{\alpha}\rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\langle\phi_{\alpha}|\psi_{\alpha}\rangle|^2 > 0. \quad (42)$$

از طرفی می دانیم که این شاهد در هم تنیدگی ویژه مقدر منفی هم دارد، زیرا

$$W(|\phi, \psi\rangle - |\psi, \phi\rangle) = -(|\phi, \psi\rangle - |\psi, \phi\rangle). \quad (۴۳)$$

به این ترتیب ثابت کرده ایم که W واقعا یک شاهد در هم تنیدگی است. می توانیم کاربرد این شاهد را برای تعیین محدوده درهم تنیدگی حالت های ورنر^{۱۴} به کار ببریم. یک حالت ورنر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_w = p\rho_s + (1-p)\rho_a, \quad (۴۴)$$

که در آن

$$\rho_s = \frac{1}{d(d+1)}(I_d \otimes I_d + F), \quad \rho_a = \frac{1}{d(d-1)}(I_d \otimes I_d - F) \quad (۴۵)$$

ماتریس های چگالی در بعد دلخواه هستند. در بعد $d = 2$ حالت ورنر فرم زیر را پیدا می کند:

$$\rho_w = \left(\frac{1-p}{3}\right)I_2 + \left(\frac{1+2p}{3}\right)|\psi^-\rangle\langle\psi^-, \quad (۴۶)$$

که در آن $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$ یک حالت بل است. در حالت کلی داریم:

$$Tr(\rho_w F) = pTr(\rho_s F) + (1-p)Tr(\rho_a F) = 2p - 1, \quad (۴۷)$$

که نشان می دهد یک حالت ورنر وقتی که $p < \frac{1}{2}$ باشد، درهم تنیده است.

■ **مثال ۲:** برای کیوبیت ها، عملگر زیر یک شاهد درهم تنیدگی است:

$$W = I - X \otimes X - Z \otimes Z. \quad (۴۸)$$

برای فهمیدن این نکته دقت می کنیم که هرگاه ρ_1 و ρ_2 دو حالت دلخواه کیوبیتی باشند، آنگاه

$$Tr(W\rho_1 \otimes \rho_2) = Tr((I - X \otimes X - Z \otimes Z)\rho_1 \otimes \rho_2) = 1 - \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2 \geq 0. \quad (۴۹)$$

که در آن $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}'_2$ تصویر بردارهای بلوخ دو حالت گفته شده روی صفحه $x - z$ هستند. از آنجا که برای یک حالت $\rho_1 \otimes \rho_2$ $Tr(W\rho_1 \otimes \rho_2)$ مثبت است، نتیجه می گیریم که برای هر ترکیب محدب آنها یعنی هر حالت جدایی پذیر نیست این کمیت مثبت است.

^{۱۴}Werner states

باقی می ماند که نشان دهیم عملگر W دارای یک ویژه مقدار منفی هست. برای این کار شکل ماتریسی این عملگر را نگاه می کنیم:

$$W = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

که نشان می دهد این عملگر دارای ویژه مقدار منفی است. بنابراین W یک شاهد درهم تنیدگی است.

■ **تمرین:** نشان دهید که برای کیوبیت ها

$$W_1 = 1 - X \otimes X - Y \otimes Y - Z \otimes Z$$

یک شاهد درهم تنیدگی نیست، اما

$$W_2 = 1 - X \otimes X + Y \otimes Y - Z \otimes Z$$

یک شاهد درهم تنیدگی است.

■ **مثال:** یک حالت درهم تنیده دلخواه در بعد d را در نظر می گیریم. تجزیه اشمیت این حالت به صورت زیر است»

$$\sum_{i=1}^d a_i |i, i\rangle \quad a_i > 0 \quad \forall i. \quad (51)$$

حال شاهد درهم تنیده زیر را می توانیم تعریف کنیم:

$$W = |\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma = \sum_{i,j=1}^d a_i a_j |i, j\rangle\langle j, i|. \quad (52)$$

داریم:

$$Tr(W\rho_{sep}) = Tr(|\phi\rangle\langle\phi|^\Gamma \rho_{sep}) = Tr(|\phi\rangle\langle\phi| \rho_{sep}^\Gamma) = \langle\phi| \rho_{sep}^\Gamma |\phi\rangle > 0 \quad (53)$$

که تساوی آخر ناشی از این است که هرگاه برای حالت های جدایی پذیر $\rho_{sep} > 0$. بنابراین روی همه حالت های جدایی پذیر W مثبت است. اما برای این که W یک شاهد درهم تنیدگی باشد، باید نشان دهیم که ویژه مقدار منفی نیز دارد. داریم: قرار می دهیم

$|\chi_{k,l}\rangle = |k,l\rangle - |l,k\rangle$ و بدست می آوریم:

$$W|\chi_{k,l}\rangle = -a_k a_l (|k,l\rangle - |l,k\rangle) = -a_k a_l |\chi_{k,l}\rangle \quad (54)$$

و از آنجا که در تجزیه اشمیت همه a_i ها مثبت هستند، می فهمیم که W ویژه مقدار منفی هم دارد. در واقع W تعداد $\frac{d(d-1)}{2}$ تا ویژه مقدار منفی دارد.

حال باید درباره سنجش درهم تنیدگی برای حالت های آمیخته قضاوت کرد؟ چگونه می توان برای حالتی مثل (16) میزان درهم تنیدگی را برحسب مقدار a تعیین کرد؟

۵ اندازه درهم تنیدگی

تا کنون در باره درهم تنیده بودن یا نبودن یک حالت بحث کردیم. حالا می خواهیم ببینیم با چه ملاک و معیاری می توانیم میزان درهم تنیدگی حالت ها را مشخص کنیم. با پیشرفت رایانش و اطلاعات کوانتومی در سه دهه اخیر دریافتیم که درهم تنیدگی یک منبع باارزش است که امکان مبادله اطلاعات و پردازش آن را به شکلی که قبلاً تصویری از آن نداشتیم فراهم می سازد. بنابراین طبیعی است که ارزش و اندازه این منبع را نیز مشخص کنیم. بنابراین یک سوال طبیعی این است که کدام یک از دو حالت زیر

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|11\rangle \quad (55)$$

و

$$|\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle \quad (56)$$

که در اختیار آلیس و باب قرار گرفته در هم تنیدگی بیشتری دارد؟ در واقع می دانیم که هیچ کدام از این دو حالت نه به درد فرابرد کوانتومی می خورند و نه به درد اشتراک کوانتومی کلید. پس در نگاه اول می توان گفت که این دو حالت هیچ ارزشی ندارند. اما شاید اگر چندین حالت یکسان از هر کدام از این دو حالت در دست داشته باشیم بتوانیم با اعمال موضعی آنها را تبدیل به حالت های بل کنیم که می دانیم برای فرایندهای

اطلاعات کوانتومی بسیار مفیدند. نکته این است که این اعمال را باید بتوانیم به صورت موضعی انجام دهیم، چرا که فرض ما این است که آلیس و باب ممکن است در دو آزمایشگاه متفاوت و کیلومترها از هم دور باشند و امکان انجام یک عمل موضعی رو هر دو تا کبویت در اختیار آنها وجود ندارد. بنابراین قبل از پرداختن به سوال در باره میزان درهم تنیدگی حالت ها، باید به این موضوع بپردازیم که چگونه می توان با اعمال موضعی درهم تنیدگی حالت ها را افزایش یا کاهش داد. نخست به تعریف اعمال موضعی می پردازیم.

۶ اعمال کوانتومی موضعی و مبادله کلاسیک اطلاعات

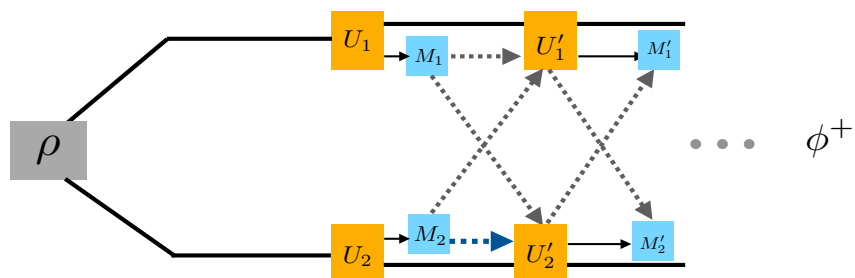
اگر تعداد دلخواهی حالت های درهم تنیده از دو ذره بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده باشند، این دو می توانند هر کدام جداگانه روی ذره ای که در دست دارد، آزمایش انجام دهد. این آزمایش می تواند یک عمل یکانی یا یک اندازه گیری عام باشد. هم چنین آلیس و باب می توانند نتیجه اندازه گیری های خود را به یکدیگر اطلاع دهند تا گیرنده بر اساس اطلاعاتی که دریافت کرده، عمل کوانتومی خود را با توجه به این اطلاعات تنظیم کند. این فرایند را آلیس و باب می توانند تکرار کنند تا به یک نتیجه دلخواه برسند، شکل (۶). مجموعه این اعمال اصطلاحاً LOCC نامیده می شود: ^{۱۵} این اعمال را می توان با یک کانال کوانتومی به شکل زیر نشان داد:

$$\mathcal{E}(\rho_{AB}) = \sum_k (M_k \otimes N_k) \rho_{AB} (M_k^\dagger \otimes N_k^\dagger). \quad (57)$$

دقت کنید که این کلی ترین کانال عمل کننده روی یک حالت دو قسمتی نیست زیرا همه عملگرهای کراوس آن به صورت ضربی و جدایی پذیر هستند. این شکل از عملگرهای کراوس هم نتیجه ی اعمال موضعی آلیس و باب است.

اولاً به طور خیلی بدیهی می دانیم که درهم تنیدگی یک حالت را با اعمال موضعی می توان کاهش داد یا کاملاً از بین برد. مثلاً مسلم است که اندازه گیری آلیس در پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ را به یکی از دو حالت $|00\rangle$ یا $|11\rangle$ تبدیل خواهد کرد که هر دو حالت هابی بدون درهم تنیدگی هستند. سوال مهم تر و جالب تر این است که آیا می توانند عکس این عمل را انجام دهند؟ یعنی درهم تنیدگی را زیاد کنند؟ پاسخ این سوال مثبت است اما فقط به صورت احتمالی. یعنی این که آلیس و باب می توانند با احتمالی حالت خود را به حالت بل تبدیل کنند. بنابراین سوال این است که این حتمال حداکثر چقدر است؟ قبل از پاسخ نهایی و جامعه به این سوال سعی می کنیم که دو مثال را بررسی کنیم.

^{۱۵} Local Operation and Classical Communication



شکل ۸: تمام اعمالی که آلیس و باب به صورت موضعی و با هماهنگی با هم روی ذرات خود انجام می دهند..

۱.۶ تبدیل یک حالت بل به یک حالت دلخواه دیگر

در این بخش نشان می دهیم چگونه با اعمال موضعی می تواند یک حالت دلخواه را به حالت دیگر تبدیل کرد. نشان می دهید که با در دست داشتن یک حالت بل آلیس و باب می توانند هر حالت دیگری را به صورت قطعی و نه با احتمال تولید کنند. نخست حالت دو بعدی را در نظر می گیریم.

۱.۱.۶ حالت دو بعدی

می خواهیم با اعمال موضعی حالت درهم تنیده ماکزیمال بل یعنی

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (58)$$

را به یک حالت دلخواه دیگر مثل

$$|\phi\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle \quad (59)$$

تبدیل کنیم. نخست نشان می دهیم که یک فرایند کوانتومی موضعی وجود دارد که این کار را انجام می دهد. آلیس حالت $|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

در آزمایشگاه خود تهیه می کند. حالا آلیس و باب مجموعه سه کیوبیت را در حالت زیر در اختیار دارند:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle_{a_1 a_2 b} &= |\chi\rangle|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle) \end{aligned} \quad (60)$$

که اندیس های نمایش داده شده نشان می دهند دو کیوبیت اول در اختیار آلیس و کیوبیت سوم در اختیار باب است. حال آلیس روی دو کیوبیت خود عملگر $CNOT$ را اعمال می کند به نحوی که a_2 کیوبیت کنترلی و a_1 کیوبیت هدف باشد، تا حالت $|\Psi_1\rangle$ به حالت زیر تبدیل شود:

$$|\Psi_2\rangle_{a_1 a_2 b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle(\alpha|0, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle) + |1\rangle(\alpha|1, 1\rangle + \beta|0, 0\rangle) \right]. \quad (61)$$

سرانجام آلیس یک اندازه گیری در پایه محاسباتی روی کیوبیت a_1 انجام می دهد که در نتیجه آن دو کیوبیت دیگر با احتمال $\frac{1}{2}$ به یکی از حالت های زیر پرتاب می شوند:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle_{a_2 b} &= \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \\ |\psi_1\rangle_{a_2 b} &= \alpha|11\rangle + \beta|00\rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

در حالت اول، حالت نهایی باقیمانده در دست آلیس و باب همانی است که می خواستیم، در حالت دوم، این حالت با انجام عمل موضعی $\sigma_x \otimes \sigma_x$ به حالت دلخواه ما تبدیل می شود. از آنجا که در هر دو مورد به حالت دلخواه خود می رسیم، نتیجه می گیریم که با احتمال برابر با یک، می توانیم یک حالت بل را به هر حالت دیگری تبدیل کنیم.

روش دیگر استفاده از اندازه گیریهای تعمیم یافته است به این معنا که آلیس یک اندازه گیری تعمیم یافته با عملگرهای زیر روی کیوبیتی که در دست دارد انجام می دهد:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (63)$$

بعد از اندازه گیری حالتی که در دست آلیس و باب باقی می ماند بسته به اینکه نتیجه ۱ یا ۲ بدست بیاید عبارت است از

$$|\phi_1\rangle = \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle}} = \alpha|0, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle,$$

یا

$$\phi_2\rangle = \frac{M_2|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_2^\dagger M_2|\psi\rangle}} = \beta|0,0\rangle + \alpha|1,1\rangle. \quad (64)$$

در صورت بدست آمدن نتیجه ۱ حالت دلخواه بدست آمده است، در صورت بدست آمدن نتیجه ۲ حالت دلخواه بعد از اینکه عملگر آلیس و باب هر دو عملگر σ_x را روی حالت بدست آمده اعمال کنند نتیجه مطلوب بدست می آید. حال نشان می دهیم که این نتیجه مختص کیوبیت ها نیست و در هر بعدی یک حالت تعمیم یافته بل را می توان با اعمال موضعی به هر حالت دلخواه دیگری تبدیل کرد.

۲.۱.۶ تبدیل یک حالت بل به یک حالت دیگر در بعد دلخواه

حالت زیر یک حالت بل در بعد d است و بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده.

$$|\psi\rangle_{a_2b} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i, i\rangle \quad (65)$$

آلیس و باب می خواهند این حالت را به یک حالت دلخواه مثل حالت زیر تبدیل کنند:

$$|\phi\rangle_{a_2b} = \sum_i \alpha_i |i, i\rangle. \quad (66)$$

برای این کار همان مراحل را که برای کیوبیت ها طی کردند، برای این حالت نیز طی می کنند. نخست حالت زیر را تهیه می کنند:

$$|\Psi_1\rangle_{a_1a_2b} = |\chi\rangle_{a_1} |\psi\rangle_{a_2b} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j} a_i |i\rangle |j, j\rangle. \quad (67)$$

سپس آلیس یک عمل موضعی تعمیم یافته $CNOT^{-1}$ را روی کیودیت های خودش انجام می دهد. در این عمل کیودیت a_2 کنترلی و کیودیت a_1 هدف است. به این ترتیب حالت به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{a_1a_2b} &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j} a_i |i-j, j, j\rangle_{a_1a_2b} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k,i} a_i |k, i-k, i-k\rangle_{a_1a_2b}. \end{aligned} \quad (68)$$

دقت کنید که برای کیوبیت ها هیچ فرقی بین $CNOT$ و معکوس آن نیست. در آخرین مرحله آلیس روی کیودیت a_1 یک اندازه گیری در پایه محاسباتی انجام می دهد که هر بار با احتمال $\frac{1}{d}$ حالت دو کیودیت دیگر یعنی a_2, b به یکی از حالت های زیر پرتاب می شود:

$$|\psi_k\rangle_{a_2b} = \sum_i a_i |i-k, i-k\rangle_{a_2b}. \quad (69)$$

آلیس و باب می توانند با عمل موضعی $X^k \otimes X^k$ این حالت را به حالت $\sum_i a_i |i, i\rangle$ تبدیل کنند.

■ **تمرین:** مشابه با کیوبیت ها نشان دهید که این کار را با اندازه گیری تعمیم یافته هم می توانیم انجام دهیم.

به این ترتیب بازهم نشان داده ایم که یک حالت بل تعمیم یافته همواره به صورت قطعی به هر حالت دلخواه دیگری تبدیل می شود. حال سوال این است که آیا می توان با اعمال موضعی درهم تنیدگی یک حالت را افزایش داد یا نه؟

۲.۶ آیا افزایش درهم تنیدگی حالت ها با اعمال موضعی ممکن است؟

نخست سعی می کنیم ببینیم آیا می توانیم به همان شیوه قبلی که در مورد کیوبیت ها عمل کردیم، در این جا هم درهم تنیدگی را با اعمال موضعی افزایش دهیم؟ می خواهیم حالت

$$|\psi\rangle_{ab} = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad 0 < \alpha < \beta < 1, \quad (70)$$

را به حالت

$$|\phi^+\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (71)$$

تبدیل کنیم. به همان شیوه ای که قبلا عمل کردیم این بار اندازه گیری غیرمتعامد زیر را در نظر می گیریم:

$$M_0 = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \\ & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}} & \\ & \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (72)$$

با این عمل آلیس روی کیوبیت a حالت مشترک بین آلیس و باب با احتمالات نشان داده شده به حالت های زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle_{ab} &= \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_0|\psi\rangle}} = |\phi^+\rangle, & P(0) &= 2\lambda^2 \\ |\psi_1\rangle_{ab} &= \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1|\psi\rangle}}, & P(1) &= 1 - 2\lambda^2. \end{aligned} \quad (73)$$

می توانیم احتمال درست کردن حالت درهم تنیده کامل یعنی حالت بل $|\phi^+\rangle$ را با افزایش λ^2 به حد اکثر میزان خود برسانیم. اما باید توجه داشته باشیم که عملگر M_1^2 باید یک عملگر مثبت باقی بماند. بنابراین می فهمیم که λ باید در محدوده زیر انتخاب شود:

$$0 \leq \lambda \leq \alpha. \quad (74)$$

و در نتیجه بیشترین مقدار λ برابر است با $\lambda_{max} = \alpha$. تحت این شرایط احتمال تبدیل حالت اولیه به حالت بل برابر می شود با:

$$P_{max}(0) = 2\alpha^2 \quad (75)$$

و حالت $|\psi_1\rangle$ نیز تبدیل می شود به یک حالت کاملاً ضربی به صورت

$$|\psi_1\rangle = |11\rangle.$$

این نتیجه کاملاً معقول است. یعنی برای بیشترین احتمال درست کردن یک حالت بل که درهم تنیدگی آن بیشترین مقدار خود را دارد، مجبور شده ایم که درهم تنیدگی حالت دوم را تا حد امکان پایین آورده و آن را به یک حالت ضربی تبدیل کنیم. اگر میزان درهم تنیدگی یک حالت بل را برابر با یک و میزان درهم تنیدگی یک حالت ضربی را برابر با صفر در نظر بگیریم، در این فرایند میزان درهم تنیدگی ای که به طور متوسط ایجاد شده برابر است با:

$$P(0) \times 1 + P(1) \times 0 = 2\alpha^2. \quad (۷۶)$$

در هم تنیدگی حالت اولیه برابر با $S(\rho_A) = -\alpha^2 \log(\alpha^2) - (1 - \alpha^2) \log(1 - \alpha^2)$ است و با رسم شکل براحتی می توان دید که این مقدار از $2\alpha^2$ بیشتر است. این مثال ساده مثالی است از این که درهم تنیدگی یک حالت را نمی توان با اعمال موضعی افزایش داد. می توانیم این ویژگی را به صورت یک قضیه کلی ثابت کنیم.

■ **قضیه:** با اعمال موضعی متوسط درهم تنیدگی زیاد نمی شود.

■ **اثبات:** یک حالت دلخواه $|\psi\rangle_{AB}$ را که بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده در نظر می گیریم. میزان درهم تنیدگی این حالت از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$E(|\psi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B). \quad (۷۷)$$

هر نوع عملیاتی که آلیس (از نوع عمل یکانی یا اندازه گیری و نظایر آن) انجام دهد، این حالت را به آزمایشی از حالت های دو بخشی هر کدام با احتمال معین تبدیل می کند. بنابراین بعد از سلسله اعمال آلیس و باب حالت فوق به حالت زیر تبدیل می شود:

$$|\psi\rangle_{AB} \longrightarrow \sum_k p_k |\psi_k\rangle_{AB} \langle \psi_k|_{AB} \quad (۷۸)$$

این اعمال البته از آنجا که توسط آلیس روی حالت $|\psi\rangle_{AB}$ انجام می شوند، تاثیری روی ماتریس چگالی باب ندارند. حال می توانیم متوسط میزان درهم تنیدگی حالت ها را بعد از اعمال آلیس پیدا کنیم. می نویسیم:

$$\overline{E'} := \sum_k p_k E(|\psi_k\rangle) = \sum_k p_k S(\rho_k^B). \quad (۷۹)$$

حال از خاصیت تحذب آنتروپی استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\overline{E'} = \sum_k p_k E(\psi_k) = \sum_k p_k S(\rho_k^B) \leq S(\sum_k p_k S(\rho_k^B)) = S(\rho^B) = E(\psi_{AB}) \quad (۸۰)$$

به این ترتیب ثابت کرده ایم که آلیس با اعمال موضعی روی کیوبیت های خودش نمی تواند درهم تنیدگی حالت مشترک را به طور متوسط بالا ببرد. کلمه متوسط در این جا مهم است، زیرا همانطور که در مثال قبل از این قضیه دیدیم، آلیس و باب می توانند با احتمالی غیر صفر یک حالت درهم تنیده ماکزیمال را تولید کنند. البته باید توجه کنیم که این اثبات کامل نیست زیرا فقط اعمال یک طرفه توسط آلیس را در نظر گرفته ایم. اما نتیجه نهایی درست است یعنی می توانیم این قضیه را در کلی ترین حالت نیز ثابت کنیم. برای اثبات آن احتیاج به مقدماتی داریم که اکنون به آن می پردازیم:

۷ تقطیر درهم تنیدگی

دربخش قبلی نشان دادیم که چگونه می توان از حالت های درهم تنیده ماکزیمال هرحالت دلخواه دیگری را با اعمال موضعی بدست آورد. هم چنین با مثال هایی نشان دادیم که با احتمالی می توان درهم تنیدگی حالت ها را نیز افزایش داد. معنای این حرف این است که با در دست داشتن تعداد زیادی از حالت هایی که درهم تنیدگی کمی دارند، می توان تعداد کمتری از حالت هایی ساخت که درهم تنیدگی بیشتری دارند. این همان چیزی است که به آن تقطیر در هم تنیدگی^{۱۶} می گویند. در این بخش نشان می دهیم که عمل وارون را نیز می توان با پرداختن بهایی انجام داد به این معنا که از تعداد زیادی حالت های درهم تنیده می توان تعداد کمتری از حالت های درهم تنیده ماکزیمال بدست آورد. به همین دلیل این کار را تقطیر درهم تنیدگی می نامیم. نخست تقطیر درهم تنیدگی را برای حالت های خالص شرح می دهیم.

۱.۷ تقطیر درهم تنیدگی برای حالت های خالص

فرض کنید که تعداد زیادی حالت های یکسان از نوع

$$|\phi\rangle = \cos\theta|0,0\rangle + \sin\theta|1,1\rangle, \quad (۸۱)$$

^{۱۶}Entanglement Distillation

داریم. بدون نقض کلیت فرض می کنیم که $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ که در این صورت $\sin \theta \leq \cos \theta$.

آلیس و باب می خواهند با اعمال موضعی از این حالت ها، حالت های درهم تنیده ماکزیمال مثل

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (۸۲)$$

درست کنند. یک راه آن است که آلیس اندازه گیری تعمیم یافته ای به شکل زیر انجام دهد. اندازه گیری او با دو عملگر M_1 و M_2 مشخص می شود. او M_1 را مطابق زیر می گیرد:

$$M_1 = c \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} \end{pmatrix} \quad (۸۳)$$

که در آن c ثابتی است که بزودی آن را تعیین می کنیم. هرگاه در اندازه گیری روی $|\psi\rangle$ نتیجه ۱ بدست بیاید حالت نهایی عبارت خواهد بود از

$$|\psi'\rangle = \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + \sin \theta |1,1\rangle), \quad (۸۴)$$

که همان نتیجه دلخواه است. البته این نتیجه با احتمال زیر بدست می آید:

$$P_1 := \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle \quad (۸۵)$$

برای آنکه این احتمال را به حداکثر ممکن خود برسانیم می بایست ضریب ثابت c را به حداکثر ممکن افزایش دهیم. ولی از آنجا که اندازه درایه های M_1 می بایست از ۱ کوچکتر باشد (تا در شرط بهنجارش صدق کند) می بایست c را برابر با $\sin \theta$ بگیریم. در این صورت M_1 برابر خواهد شد با

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tan \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (۸۶)$$

عملگر M_2 را می بایست چنان بگیریم که شرط بهنجارش یعنی $M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 = I$ برقرار شود. بنابراین قرار می دهیم

$$M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \tan^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۸۷)$$

حال با اندازه گیری تعمیم یافته $\{M_1, M_2\}$ یکی از دو نتیجه زیر با احتمالات نشان داده شده بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{M_1|\phi\rangle}{\sqrt{\langle\phi|M_1^\dagger M_1|\phi\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle), & P_1 &= \langle\phi|M_1^\dagger M_1|\phi\rangle = 2\sin^2\theta \\ \text{یا} \\ |\psi_2\rangle &= \frac{M_2|\phi\rangle}{\sqrt{\langle\phi|M_2^\dagger M_2|\phi\rangle}} = |0,0\rangle & P_2 &= 1 - 2\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (88)$$

بنابراین می توان با احتمال $2\sin^2\theta$ یک حالت درهم تنیده از نوع $|\phi\rangle$ را به یک حالت درهم تنیده ماکزیمال تبدیل کرد. دقت کنید که هرچه θ به 0 نزدیک تر باشد یعنی حالت اولیه جدایی پذیر تر باشد این احتمال کمتر است.

۲.۷ تقطیر درهم تنیدگی برای حالت های آمیخته

تقطیر درهم را برای حالت های آمیخته با یک مثال شرح می دهیم. فرض کنید که حالت اولیه مخلوطی است از یک حالت بل $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)$ و یک حالت جدایی پذیر:

$$\begin{aligned} \rho &= (1-p)|0,1\rangle\langle 0,1| + p|\psi\rangle\langle\psi| \\ &= (1-p)|0,1\rangle\langle 0,1| + \frac{p}{2}(|0,0\rangle\langle 0,0| + |0,0\rangle\langle 1,1| + |1,1\rangle\langle 0,0| + |1,1\rangle\langle 1,1|) \end{aligned} \quad (89)$$

آلیس و باب دو جفت از حالت ρ اختیاری کنند. بنابراین حالت اولیه عبارت است از $\rho \otimes \rho$:

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho &= (1-p)^2|0101\rangle\langle 0101| \\ &+ \frac{p(1-p)}{2}|0100\rangle\langle 0100| + \frac{p(1-p)}{2}|0101\rangle\langle 0111| + \frac{p(1-p)}{2}|0111\rangle\langle 0100| + \frac{p(1-p)}{2}|0111\rangle\langle 0111| \\ &+ \frac{p(1-p)}{2}|0001\rangle\langle 0001| + \frac{p(1-p)}{2}|0001\rangle\langle 1101| + \frac{p(1-p)}{2}|1101\rangle\langle 0001| + \frac{p(1-p)}{2}|1101\rangle\langle 1101| \\ &+ \frac{p^2}{4}|0000\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4}|0000\rangle\langle 0011| + \frac{p^2}{4}|0011\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4}|0011\rangle\langle 0011| \\ &+ \frac{p^2}{4}|0000\rangle\langle 1100| + \frac{p^2}{4}|0000\rangle\langle 1111| + \frac{p^2}{4}|0011\rangle\langle 1100| + \frac{p^2}{4}|0011\rangle\langle 1111| \\ &+ \frac{p^2}{4}|1100\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4}|1100\rangle\langle 0011| + \frac{p^2}{4}|1111\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4}|1111\rangle\langle 0011| \\ &+ \frac{p^2}{4}|1100\rangle\langle 1100| + \frac{p^2}{4}|1100\rangle\langle 1111| + \frac{p^2}{4}|1111\rangle\langle 1100| + \frac{p^2}{4}|1111\rangle\langle 1111| \end{aligned} \quad (90)$$

در این جا کیوبیت اول و سوم در اختیار آلیس و کیوبیت دوم و چهارم در اختیار باب هستند. بنابراین حالتی مثل $|0011\rangle$ را به طور کامل می بایست به شکل $|0011\rangle_{a_1, b_1, a_2, b_2}$ نوشت که در آن اندیس های a و b برای آلیس و باب به کار می روند.

حال آلیس و باب هر کدام یک عمل $CNOT$ روی کیوبیت هایی که دارند اعمال می کنند. این عمل را با نماد $C_{a_1, a_2} C_{b_1, b_2}$ نشان می دهیم که بیان می کند در این عمل بیت های a_1 و b_1 به عنوان بیت های کنترلی و بیت های a_2 و b_2 به عنوان بیت های هدف به کار می روند. پس از این عمل حالت فوق به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
\rho_{out} = & (1-p)^2 |0100\rangle\langle 0100| \\
& + \frac{p(1-p)}{2} |0101\rangle\langle 0101| + \frac{p(1-p)}{2} |0100\rangle\langle 0110| + \frac{p(1-p)}{2} |0110\rangle\langle 0101| + \frac{p(1-p)}{2} |0110\rangle\langle 0110| \\
& + \frac{p(1-p)}{2} |0001\rangle\langle 0001| + \frac{p(1-p)}{2} |0001\rangle\langle 1110| + \frac{p(1-p)}{2} |1110\rangle\langle 0001| + \frac{p(1-p)}{2} |1110\rangle\langle 1110| \\
& + \frac{p^2}{4} |0000\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4} |0000\rangle\langle 0011| + \frac{p^2}{4} |0011\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4} |0011\rangle\langle 0011| \\
& + \frac{p^2}{4} |0000\rangle\langle 1111| + \frac{p^2}{4} |0000\rangle\langle 1100| + \frac{p^2}{4} |0011\rangle\langle 1111| + \frac{p^2}{4} |0011\rangle\langle 1100| \\
& + \frac{p^2}{4} |1111\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4} |1111\rangle\langle 0011| + \frac{p^2}{4} |1100\rangle\langle 0000| + \frac{p^2}{4} |1100\rangle\langle 0011| \\
& + \frac{p^2}{4} |1111\rangle\langle 1111| + \frac{p^2}{4} |1111\rangle\langle 1100| + \frac{p^2}{4} |1100\rangle\langle 1111| + \frac{p^2}{4} |1100\rangle\langle 1100|
\end{aligned} \tag{91}$$

در آخرین مرحله آلیس و باب حالت کیوبیت های هدف خود را یعنی کیوبیت های a_2 و b_2 در پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ اندازه می گیرند. بسته به اینکه چه مقداری بدست بیاورند حالت ρ_{out} به یک حالت معین افکنده می شود. به عنوان مثال اگر آلیس و باب حالت $|11\rangle$ را بدست بیاورند حالت نهایی به ترکیبی از حالت هایی فکنده می شوند که درون جعبه قرارداد شده اند. عملگر تصویر برای این نتیجه عبارت است از

$$M_{11} = I \otimes I \otimes |11\rangle\langle 11|. \tag{92}$$

این نتیجه با احتمال

$$P(11) := \text{tr}(M_{11}\rho) = \frac{p^2}{2} \tag{93}$$

بدست می آید و حالت بیت های اول و سوم به حالت

$$\rho_{11} = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{94}$$

افکنده می شود. از آنجا که آلیس و باب ازدونسخه از حالت ρ استفاده کرده اند نتیجه می گیریم که احتمال اینکه پس از اندازه گیری یک حالت بل یعنی یک حالت درهم تنیده ماکزیمال بدست بیاورند برابر است با $\frac{p^2}{4}$. به عنوان مثال اگر $p = 0.9$ یعنی حالت اولیه تنها به اندازه ده درصد ناخالصی داشته باشد، احتمال اینکه پس از اندازه گیری حالت بل به صورت خالص بدست بیاید در حدود ۲۰ درصد است. البته تنها نتیجه $|11\rangle$ نیست که آلیس و باب را به حالت خالص بل نزدیک می کند. آنها هم چنین می توانند با احتمال

$$P(00) := \text{tr}(M_{00}\rho) = \frac{3}{2}p^2 - 2p + 1, \quad (95)$$

می توانند حالت $|00\rangle$ را بدست بیاورند که در این صورت حالت بیت های اول و سوم به به حالت زیر افکنده می شود

$$\rho_{00} = \frac{M_{00}\rho M_{00}^\dagger}{\text{tr}(M_{00}\rho M_{00}^\dagger)} = \frac{2(1-p)^2}{3p^2 - 4p + 2} |01\rangle\langle 01| + \frac{p^2}{3p^2 - 4p + 2} |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (96)$$

این حالت شبیه به همان حالت اولیه است با این تفاوت که درجه اختلاط آن به صورت زیر تغییر کرده است:

$$p \longrightarrow p' = \frac{p^2}{3p^2 - 4p + 2}. \quad (97)$$

این حالت ها را دوباره می توان به همین روش تخلیص کرد. این بار احتمال بدست آوردن یک حالت بل برابر است با $\frac{p'^2}{4}$. بنابراین اگر دو بار این فرایند را انجام دهیم احتمال کل بدست آوردن حالت بل برابر خواهد بود با

$$P_{\text{success}}^{(2)} = \frac{p^2}{4} + \frac{1}{2}P(00)\frac{p'^2}{4} \quad (98)$$

و اگر سه بار این فرایند را انجام دهیم احتمال موفقیت برابر خواهد بود با

$$P_{\text{success}}^{(3)} = \frac{p^2}{4} + \frac{1}{2}P(00)\frac{p'^2}{4} + \frac{1}{4}P'(00)\frac{p''^2}{4} \quad (99)$$

که در آن

$$P'(00) = \frac{3}{2}p'^2 - 2p' + 1, \quad \text{و} \quad p'' = \frac{p'^2}{3p'^2 - 4p' + 2} \quad (100)$$

این فرایند خیلی زود همگرا می شود و نهایتاً منحنی زیر برای احتمال موفقیت بر حسب p بدست می آید.

۳.۷ اندازه درهم تنیدگی برای حالت های خالص

پاسخ سوال یک ساده است و درستی این پاسخ نیز در درس مربوط به آنتروپی فون نیومان نشان داده خواهد شد. هرگاه یک سیستم دو بخشی در حالت خالص $|\psi\rangle_{AB}$ باشد، در هم تنیدگی این دو بخش با یکدیگر با کمیت زیر سنجیده می شود:

$$E(|\psi\rangle_{AB}) := S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (101)$$

که در آن

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (102)$$

و ρ_A و ρ_B ماتریس های چگالی کاهش یافته این دو زیر بخش هستند. با توجه به تجزیه اشمیت از حالت خالص $|\psi\rangle_{AB}$ این دو ماتریس چگالی اگر چه با هم متفاوت اند اما ویژه مقادیر یکسان و در نتیجه آنتروپی های یکسان دارند. در واقع هرگاه ویژه مقادیرهای ماتریس ρ برابر با $\{\lambda_i, i = 1 \dots d\}$ باشد، آنگاه

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i. \quad (103)$$

این تعریف در هر بعدی صادق است. با این تعریف حالت های بل برای کیوبیت ها درهم تنیدگی ماکزیمالی برابر با 1 و حالت های جدایی پذیر درهم تنیدگی صفر پیدامی کنند. هم چنین درهم تنیدگی یک حالت ماکزیمال کیوتربیتی از نوع

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle + |2,2\rangle) \quad (104)$$

برابر با $\log_2 3$ و در هم تنیدگی یک حالت چهاربعدهای از نوع

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0,0\rangle + |1,1\rangle + |2,2\rangle + |3,3\rangle) \quad (105)$$

برابر با $\log_2 4 = 2$ است. حاف نشان خواهیم داد که چرا تعریف میزان درهم تنیدگی یک حالت خالص به سنجش آنتروپی فون نویمان می انجامد. در واقع ثابت می کنیم که هرگاه مجموعه ای N تایی از این حالات در اختیار A و B باشد می توانند با اعمال موضعی و مبادله اطلاعات کلاسیک^{۱۷} از آنها تعداد $M := NS(\rho)$ تا حالت بل که درهم تنیدگی ماکزیمال دارند تهیه کنند. این نتیجه گیری البته در حد $N \rightarrow \infty$ درست است. به بیان دیگر داریم

^{۱۷}Local Operation and Classical Communication (LOCC)

$$S(\rho) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \quad (۱۰۶)$$

که در آن M تعداد حالت های بل است که می توان از N حالت تقطیر کرد. ایده اصلی اثبات را بدون نقض کلیت می توانیم با یک مثال ساده نشان دهیم. هر کسی می تواند این مثال را سرمشق خود قرار دهد و اثبات را برای حالت کلی تکمیل کند. حالتی مثل

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle \quad (۱۰۷)$$

در نظر می گیریم. بدون نقض کلیت نیز فرض می کنیم $P > \frac{1}{2}$ است. فرض کنید که آلیس و باب سه نسخه از این حالت ها را در دست دارند. در این صورت حالت کلی در دست آنها به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle_{a_1 b_1; a_2 b_2; a_3 b_3} &= |\phi\rangle^{\otimes 3} = (\sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle)^{\otimes 3} \\ &= \sqrt{1-p}^3 |00, 00, 00\rangle + \sqrt{1-p}^2 \sqrt{p} (|00, 00, 11\rangle + |00, 11, 00\rangle + |11, 00, 00\rangle) \\ &= +\sqrt{1-p} \sqrt{p}^2 (|11, 11, 00\rangle + |11, 00, 11\rangle + |00, 11, 11\rangle) + \sqrt{p}^3 |11, 11, 11\rangle \end{aligned} \quad (۱۰۸)$$

اندیس های a_i و b_i نشان می دهند که کدام کیوبیت در دست الیس و کدام کیوبیت در دست باب است. اما این حالت را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle_{a_1 a_2 a_3; b_1 b_2 b_3} &= \sqrt{1-p}^3 |000, 000\rangle + \sqrt{1-p}^2 \sqrt{p} (|001, 001\rangle + |010, 010\rangle + |100, 100\rangle) \\ &+ \sqrt{1-p} \sqrt{p}^2 (|110, 110\rangle + |101, 101\rangle + |011, 011\rangle) + \sqrt{p}^3 |111, 111\rangle. \end{aligned} \quad (۱۰۹)$$

حال الیس و باب می توانند هرکدام یک اندازه گیری در پایه اسپین کل در راستای z انجام دهند: بسته به نتیجه ای که بدست می آید، حالت $|\Psi\rangle$ به یکی از حالت های زیر کاهش پیدا می کند:

$$\begin{aligned} |\Psi_0(3)\rangle &= |000, 000\rangle & Pr(0) &= (1-p)^3 \\ |\Psi_1(3)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|001, 001\rangle + |010, 010\rangle + |100, 100\rangle) & Pr(1) &= 3 \binom{1}{1} (1-p)^2 p \\ |\Psi_2(3)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|110, 110\rangle + |101, 101\rangle + |011, 011\rangle) & Pr(2) &= \binom{3}{2} (1-p) p^2 \\ |\Psi_3(3)\rangle &= |111, 111\rangle & Pr(3) &= p^3. \end{aligned} \quad (۱۱۰)$$

اگر همین محاسبه را برای حالت

$$|\Psi(N)\rangle_{a_1 b_1; \dots; a_N b_N} = |\phi\rangle^{\otimes 3} = (\sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle)^{\otimes N}$$

انجام دهیم نتیجه این خواهد بود که حالت $|\Psi(N)\rangle$ با احتمال $P_k(N) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ روی حالتی کاهش پیدا می کند که ترکیب خطی یکنواختی از حالت هایی است که در آنها هم آلیس و هم باب دقیقاً k تا صفر و $N-k$ تا یک دارند و جایگاه این صفر و یک ها برای هر دو نفر یکسان است. اما رمبش روی کدامیک از حالت ها بیشتر است؟ پاسخ اش این است که در حد $N \gg 1$ حالت $|\psi(N)\rangle$ با احتمال نزدیک به حالتی می رمبد که در آن $k = Np$ است. برای فهم این نکته دقت می کنیم که

$$Pr(k = Np) = \binom{N}{Np} \times (1-p)^{Np} p^{N(1-p)} \approx 2^{NH(p)} \times 2^{-NH(p)} \approx 1, \quad (111)$$

که در آن $H(p)$ آنتروپی فون نویمان برای حالت آمیخته آلیس یا باب است: یعنی

$$H(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) = S(\rho_A)$$

که در آن

$$\rho_A = Tr_B(|\psi\rangle_{AB} \langle \psi|)$$

است. به این ترتیب در حد N های بی نهایت بزرگ، با احتمال قطعی آلیس و باب حالت $\Psi_{Np}(N)$ را بدست می آورند. این حالت ترکیب خطی یکنواختی از حالت هایی است که در آنها هم آلیس و هم باب دقیقاً Np تا صفر و $N(1-p)$ تا یک دارند و جایگاه این صفر و یک ها برای هر دو نفر یکسان است. تعداد چنین جملاتی در این ترکیب خطی یکنواخت برابر با $\binom{N}{Np} = 2^{NH(p)} = 2^{NS(\rho)}$ است. اما آلیس و باب این حالت را با اعمال موضعی و با یک بازتعریف حالت ها، هر کدام برای خود، می توانند تبدیل به تعداد $NS(\rho)$ تا حالت بل کامل بکنند. به عنوان مثال برای $N = 4$ و $p = \frac{1}{4}$ داریم:

$$|\Psi_1(4)\rangle = \frac{1}{2} (|1000, 1000\rangle + |0100, 0100\rangle + |0010, 0010\rangle + |0001, 0001\rangle). \quad (112)$$

حال آلیس و باب هرکدام یک عملگر یکانی روی چهار کیوبیت خود اعمال می کنند که کار زیر را انجام دهد:

$$|1000\rangle \longrightarrow |00\rangle \otimes |00\rangle$$

$$|0100\rangle \longrightarrow |01\rangle \otimes |00\rangle$$

$$\begin{aligned} |0010\rangle &\longrightarrow |10\rangle \otimes |00\rangle \\ |0001\rangle &\longrightarrow |11\rangle \otimes |00\rangle. \end{aligned} \quad (113)$$

به آسانی می توان دید که در اثر این اعمال موضعی حالت $|\Psi_1(4)\rangle$ تبدیل به حالت زیر می شود:

$$|\Psi_1(4)\rangle \longrightarrow |\phi^+\rangle \otimes |\phi^+\rangle \otimes |00\rangle \otimes |00\rangle. \quad (114)$$

در حالت کلی و برای تعداد دلخواهی از ذرات و برای مقدار p ، تبدیل زیر انجام می شود:

$$|\Psi_{Np}(N)\rangle \longrightarrow \underbrace{|\phi^+\rangle \otimes |\phi^+\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi^+\rangle}_{NS(\rho)} \quad (115)$$

به این ترتیب آلیس و باب می توانند از N حالت دلخواه که درهم تنیدگی چندانی ندارند، با اعمال موضعی، تعداد $NS(\rho)$ تا حالت کامل بل بسازند و به همین دلیل میزان درهم تنیدگی هر کدام از حالت های اولیه را می توان به اندازه $S(\rho)$ گرفت.

۴.۷ درهم تنیدگی حالت های آمیخته

هرگاه دو ذره ای که در دست آلیس و باب است در یک حالت آمیخته ρ_{AB} باشند، دیگر نمی توان درهم تنیدگی آنها را از رابطه $E(\rho_{AB}) = S(\rho_A)$ یا $E(\rho_{AB}) = S(\rho_B)$ حساب کرد. یک مثال نقض ساده این موضوع را نشان می دهد. فرض کنید که حالت این دو ذره به صورت زیر باشد:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}I_A \otimes \frac{1}{2}I_B, \quad (116)$$

که به وضوح یک حالت جدایی پذیر است، اما آنتروپی هر کدام از قسمت ها بیشترین مقدار ممکن را دارد. علاوه بر این می توان براحتی نشان داد که برای حالت های آمیخته تساوی $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ برقرار نیست. مثال نقض ساده ای برای این عدم تساوی حالت $\rho_{AB} = \frac{1}{2}(I_2)_A \otimes \frac{1}{3}(I_3)_B$ است. از یک کیوبیت و یک کیوتربت است.

برای دست یافتن به تعریفی معقول و منطقی برای درهم تنیدگی چنین حالتی توجه می کنیم که یک حالت آمیخته یک تجزیه آنزاملی به صورت زیر دارد:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle_{AB} \langle \phi_i|. \quad (117)$$

در قدم اول می توان درهم تنیدگی چنین حالتی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$E(\rho) := \sum_i p_i E(|\phi_i\rangle) \quad (118)$$

که به معنای متوسط درهم تنیدگی همه حالت هایی است که این آنزامل را تشکیل داده اند. اما این تعریف یک نکته مهم را در نظر نمی گیرد و آن اینکه تجزیه های آنزاملی یک حالت آمیخته یکتا نیست. به عنوان مثال براحتی معلوم می شود که تساوی زیر برقرار است:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle\langle \phi^+| + |\phi^-\rangle\langle \phi^-|). \quad (119)$$

طرف اول این تساوی نشان می دهد که حالت در نظر گرفته شده یک حالت کاملاً جدایی پذیر است، اما کاربرد رابطه (118) نشان می دهد که درهم تنیدگی آن ماکزیمم است. بنابراین تعریف (118) را به شکل زیر اصلاح می کنیم:

$$E(\rho) := \text{Min}_{\{p_i, |\phi_i\rangle\}} \sum_i p_i E(|\phi_i\rangle) \quad (120)$$

که در آن می نیم روی تمام تجزیه های ممکن صورت می گیرد. چارلز بنت و دیگران نشان داده اند که این تعریف از نظر کاربردی نیز مناسب است به این معنا که هرگاه یک دسته N تایی از حالت های ρ_{AB} داشته باشیم می توانیم با اعمال کوانتومی موضعی و مبادله اطلاعات کلاسیک حالت ρ_{AB} را به تعداد $M = NE(\rho)$ حالت بل با درهم تنیدگی ماکزیمال تبدیل کنیم. به همین دلیل این تعریف از درهم تنیدگی را درهم تنیدگی تشکیل^{۱۸} می گویند.

این تعریف اگرچه از نظر مفهومی مسیر مارا روشن می کند ولی از نظر محاسباتی مسئله محاسبه درهم تنیدگی را به یک مسئله بهینه سازی بایی نهایت پارامتر تبدیل می کند که حل آن اگر غیر ممکن نباشد بسیار دشوار است. در اینجا باید یادآوری کنیم که این تعریف درهمه ابعاد صحیح است.

حال سوال این است که آیا می توان در بعضی از حالات ساده رابطه بسته و فشرده ای برای درهم تنیدگی یافت؟ در سالهای اخیر نشان داده شده است که در دویعد مشخص و متضاد یعنی در بعد ۲ و در بعد بی نهایت (حالت های پیوسته) می توان رابطه بسته ای برای درهم تنیدگی پیدا کرد.

^{۱۸}Entanglement of Formation (EoF)